**Комплексные числа и действия с ними.**

***Комплексные числа*** записываются в виде: . Здесь  – *действительные числа*, а  *i* – *мнимая единица, т.e.* .Число  *a* называется *действительной частью комплексного числа*, а  *– мнимой частью* комплексного числа *.* Два комплексных числа  и  называются *сопряжёнными* комплексными числами.

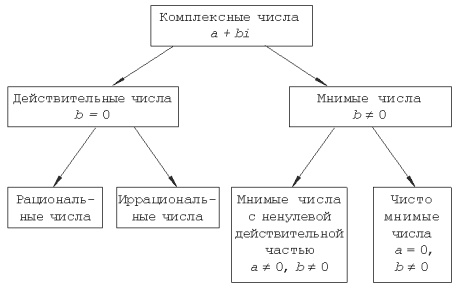
Формула называется алгебраической формой записи комплексного числа.

***Основные договорённости:***

1.  Действительное число  *а*  может быть также записано в форме комплексного числа: или .Например, записи  и   означают одно и то же число  5 .

2.  Комплексное число называется *чисто мнимым* *числом*.Запись означает то же самое, что и  .

3.  Два комплексных числа  и  считаются равными, если   и. В противном случае комплексные числа не равны.



***Сложение.*** Суммой комплексных чисел  и  называется комплексное число  *.* Таким образом, *при сложении комплексных чисел отдельно складываются их действительные и мнимые части.*

***Вычитание.***  Разностью двух комплексных чисел  (уменьшаемое) и (вычитаемое) называется комплексное число *.*

Таким образом, *при вычитании двух комплексных чисел отдельно вычитаются их действительные и мнимые части.*

***Умножение.***  Произведением комплексных чисел   и  называется комплексное число:

*.* Это определение вытекает из двух требований:

  1)  числа    и  должны перемножаться, как алгебраические двучлены,

  2)  число *i* – мнимая единица обладает основным свойством:  *i* 2 = *–*1,

3)  *.* Следовательно, *произведение  двух сопряжённых комплексных чисел равно действительному положительному числу.*

П р и м е р. Найти .

Р е ш е н и е . .

П р и м е р. .

Р е ш е н и е . .

***Деление.***Разделить комплексное число (делимое) на другое (делитель) *-* значит найти третье число  *e+ f i*  (частное), которое будучи умноженным на делитель ,  даёт в результате делимое *.*

Если делитель не равен нулю, деление всегда возможно.

П р и м е р .  Найти .

Р е ш е н и е . Запишем это отношение в виде дроби: .

Умножив её числитель и знаменатель на  *, число сопряженное знаменателю,* и выполнив все преобразования, получим:

*.*

П р и м е р . Возвести в квадрат комплексное число: .

Р е ш е н и е .

***Геометрическое представление комплексных чисел.***

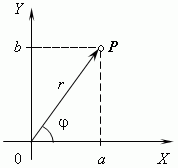
Действительные числа изображаются точками на числовой прямой:

http://www.bymath.net/studyguide/alg/sec/alg26c.gif

Здесь точка *A* означает число –3, точка *B* – число 2, и  *O*  – ноль.

В отличие от этого комплексные числа изображаются точками на координатной плоскости. Выберем для этого прямоугольные (декартовы) координаты с одинаковыми масштабами на обеих осях. Тогда комплексное число будет представлено точкой  *Р* c абсциссой *а* и ординатой *b* (см. рис1.). Эта система координат называется ***комплексной плоскостью***.

Комплексная плоскость состоит из двух осей:  
 – действительная ось OX.  
 – мнимая ось OY.

рис.1

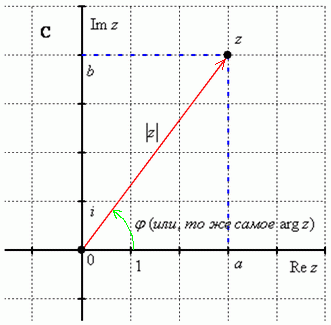
***Модулем*** комплексного числа называется длина радиус-вектора *OP*, изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости. Модуль комплексного числа  обозначается  | | или буквой  *r*  или , и вычисляется по формуле:

.

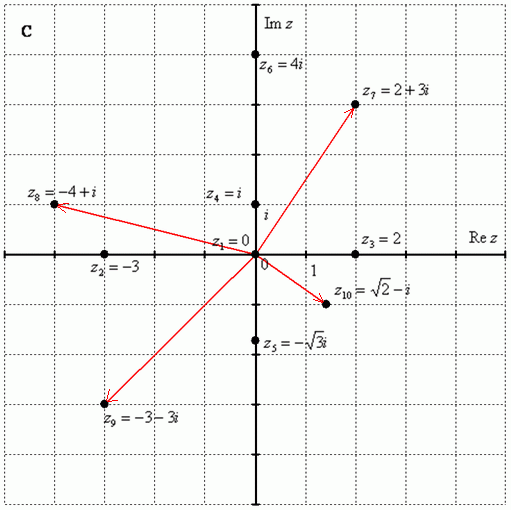
Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль.

***Аргументом*** *комплексного числа* - называется **угол**  между положительной полуосью действительной оси   и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке. Аргумент не определён для единственного числа: .

Аргумент комплексного числа  стандартно обозначают: или .

Изобразим на комплексной плоскости число . 

П р и м е р .  Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:



***Тригонометрическая форма комплексного числа.***

Абсциссу  *a* и ординату *b* комплексного числа  можно выразить через его модуль    и аргумент :

тогда

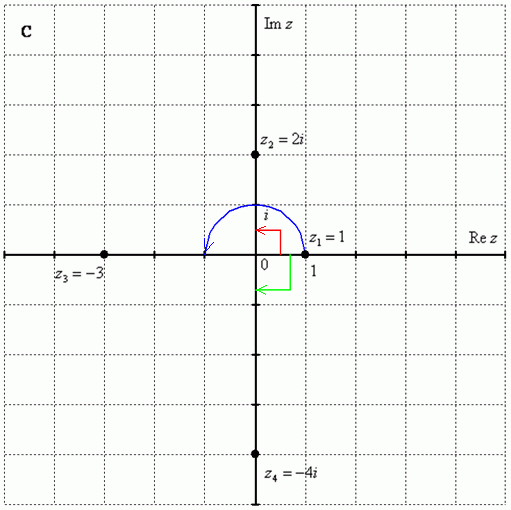
где - модуль комплексного числа ,

- аргумент комплексного числа ,

, или 



П р и м е р .  Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

Р е ш е н и е . Выполним чертёж:  


 (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси).

Число в тригонометрической форме: .

1. .

(число лежит непосредственно на мнимой положительной полуоси).

Число в тригонометрической форме: .

Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнить проверку):

.

1. .

  (или 180 градусов).

Число в тригонометрической форме: .

Проверка: .

и, соответственно: .

Проверка: .

***Операции с комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.***

  Это известная *формула Муавра.*

Здесь  *k*  - целое число. Чтобы получить  *n*  различных значений корня  *n*-ой степени из  *z*  необходимо задать  *n*  последовательных значений для  *k* (*k* = 0, 1, 2,…, *n* – 1).

П р и м е р . Дано комплексное число , найти .

Р е ш е н и е .

Представим данной число в тригонометрической форме.

)

Тогда, по формуле Муавра:

П р и м е р . Найти корни уравнения .

Р е ш е н и е . Перепишем уравнение в виде .

В данном примере  , поэтому уравнение будет иметь два корня: .

.

Найдем модуль и аргумент комплексного числа :  
=  
Число  располагается в первой четверти, поэтому:  
.

Подставляя в формулу значение , получаем первый корень:

Подставляя в формулу значение , получаем второй корень:

Ответ: .

Показательная и тригонометрические функции в области комплексных чисел связаны между собой формулой

,

которая носит название *формулы Эйлера*. В результате получим показательную форму комплексного числа:

.

П р и м е р .  Пусть . Напишите показательную форму числа .

Р е ш е н и е . Находим модуль и аргумент числа:

***=***, .

Следовательно, показательная форма комплексного числа такова:

.

П р и м е р .  Комплексное число записано в показательной форме

.

Найдите его алгебраическую форму.

Р е ш е н и е . По формуле Эйлера

***Операции с комплексными числами, представленными***

***в показательной форме.***

1. ,

П р и м е р .  и . Найти .

Р е ш е н и е .

***Решение квадратных уравнений c вещественными коэффициентами.***

|  |  |
| --- | --- |
| Значение дискриминанта | Корни уравнения |
|  | Уравнение имеет 2 различных действительных корня |
|  | Уравнение имеет 2 равных действительных корня |
|  | Уравнение имеет 2 комплексно-сопряжённых корня |

П р и м е р ы .

1. Решите уравнение: .

Р е ш е н и е . Найдем дискриминант

Уравнение имеет два действительных корня:

2. Решите уравнение: .

Р е ш е н и е . .

Уравнение имеет два равных действительных корня: .

3. Решите уравнение: .

Р е ш е н и е . .

Уравнение имеет комплексно-сопряженные корни:   .

***Решение квадратных уравнений в поле комплексных чисел.***

Квадратное уравнение  имеет ровно два корня (они могут быть равными), которые можно найти по формуле: .

Пусть *.* Тогда ,

где квадратные корни в скобках являются арифметическими квадратными корнями из положительных чисел.

Варианты заданий.

1. Изобразить числа на комплексной плоскости, представить их в тригонометрической и показательной формах.
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
8. ;
9. .
10. Решить квадратное уравнение в поле комплексных чисел. Сделать проверку корней.
11. Извлечь корни из комплексных чисел.
12. а) ; б) ;
13. а) ; б) ;
14. а) ; б) ;
15. а); б) ;
16. а) ; б) ;
17. а) ; б) ;
18. а) ; б) ;
19. а) ; б) ;
20. а); б) ;
21. а); б) .
22. Даны: уравнение, комплексное число и натуральное число.

Найти:

1. Корни уравнения и .
2. Найти и .
3. Комплексное число в алгебраической форме;
4. Вычислить . Ответ записать в тригонометрической и показательной формах.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № варианта | Уравнение |  | n |
| 1) |  |  | 6 |
| 2) |  |  | 10 |
| 3) |  |  | 12 |
| 4) |  |  | 6 |
| 5) |  |  | 8 |
| 6) |  |  | 6 |
| 7) |  |  | 8 |
| 8) |  |  | 18 |
| 9) |  |  | 8 |
| 10) |  |  | 6 |

1. Даны многочлены . Найти .
2. ; ;
3. ; ;
4. ; ;
5. ; ;
6. ; ;
7. ; ;
8. ; ;
9. ; ;
10. ; ;
11. ; ;
12. Решить кубическое уравнение.
13. ;

**Решение типового задания**

1. **Изобразить числа на комплексной плоскости, представить их в тригонометрической и показательной формах.**

.

**Решение.**

Пусть .

, число лежит на оси OY.; .

.

, число лежит на оси OX.

.

*.*

.

.

.

.

.

.

3

2

-2

2

1

Y

X

1. **Решить квадратное уравнение в поле комплексных чисел**

.

**Решение.** Вычисляем дискриминант:

.

Вычисляем [корни](http://fxdx.ru/page/korni-kompleksnyh-chisel) из дискриминанта по формуле квадратных [корней](http://fxdx.ru/page/raspolozhenie-kornej-na-kompleksnoj-ploskosti-korni-iz-edinicy) из [комплексного](http://fxdx.ru/page/koren-naturalnoj-stepeni-iz-kompleksnogo-chisla) числа:

=.

Вычисляем [корни](http://fxdx.ru/page/korni-kompleksnyh-chisel) [уравнения](http://fxdx.ru/page/parametricheskie-i-kanonicheskie-uravnenija-prjamoj) по формуле [корней](http://fxdx.ru/page/raspolozhenie-kornej-na-kompleksnoj-ploskosti-korni-iz-edinicy) квадратного уравнения:

;

;

.

Ответ: .

Проверка корней:

,

, .

1. **Извлечь корни из комплексных чисел.**

  а) ;   б) .

**Решение.**

а) .

Запишем комплексное число в тригонометрической форме.

Найдем и .

Значит, .

Запишем общее решение по формуле

, т.е.

.

Следовательно,

;

;

;

.

б) .

Т.к. , то  ***=*** и

. Записав комплексное число в тригонометрической форме

, находим

.

Отсюда,

1. **Даны: уравнение**  **, комплексное число и натуральное число .**

Найти:

1. Корни уравнения и .
2. Найти и .
3. Комплексное число в алгебраической форме;
4. Вычислить . Ответ записать в тригонометрической и показательной формах.

**Решение:**



, и

1. т.к. , то

и .

.

1. , **.**

Представим комплексное число в тригонометрической и показательной формах: ,

.

Т.к. , то .

Т.к. , то

1. **Даны многочлены и** . **Найти .**

**Решение:**

Делим многочлены в столбик:

|  |  |
| --- | --- |
| 2x5 + x4 + 3x3 - 7x2 + 2x + 4 | x2 - 6x - 7 |
| 2x5 - 12x4 - 14x3 | 2x3 + 13x2 + 95x + 654 |
| 13x4 + 17x3 - 7x2 + 2x + 4 |  |
| 13x4 - 78x3 - 91x2 |  |
| 95x3 + 84x2 + 2x + 4 |  |
| 95x3 - 570x2 - 665x |  |
| 654x2 + 667x + 4 |  |
| 654x2 - 3924x - 4578 |  |
| 4591x + 4582 |  |

При делении получили:  - частное

 - остаток



1. **Решить кубическое уравнение** .

**Решение.**

Уравнение третьей степени  имеет три корня (действительные или комплексные), при этом нужно считать каждый корень столько раз, какова его кратность. Так как все коэффициенты данного уравнения являются действительными числами, то комплексные корни уравнения, если они есть, будут парными комплексно сопряженными.

Подбором находим первый корень уравнения , так как

Т.к. является корнем уравнения, то многочлен

делится на без остатка. Выполним это деление «в столбик**»:**

0

Представляя теперь многочлен  в виде произведения линейного и квадратного множителя, получим:

Другие корни находим как корни квадратного уравнения:

Ответ: ,